

Тәжірибелік сабақ

Тақырып 5. Векторлардың векторлық көбейтіндісі, аралас көбейтіндісі және олардың геометрия мен механика салаларындағы қолданулары. Қасиеттері.

1. $\mathbf{a} = (1, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (-2, 4, -1)$, $\mathbf{c} = (2, 4, -6)$ векторлары берілген. Берілген векторлар компланар ма, компланар емес болған жағдайда олар қандай үштік (оң немесе сол) құрайды және осы векторлардан тұрғызылған параллелипедтің көлемін тап.

Шешуі:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -78 \neq 0.$$

Векторлардың аралас көбейтіндісінен олар компланар емес және сол үштік құрайтынын көреміз, ал $V = 78$.

2. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ векторларынан құрылған параллелограммның ауданын тап. Мұндағы $\mathbf{i} (1, 0)$, $\mathbf{j} (0, 1)$ - бірлік векторлар және өзара перпендикуляр векторлар.

Шешуі:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) * (\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) = 2\mathbf{i} * \mathbf{i} + 3\mathbf{j} * \mathbf{i} - 8\mathbf{i} * \mathbf{j} - 12\mathbf{j} * \mathbf{j} = -3\mathbf{i} * \mathbf{j} - 8\mathbf{i} * \mathbf{j} = -11\mathbf{i} * \mathbf{j} = \mathbf{c};$$

Спар. = $|\mathbf{c}| = 11|\mathbf{i} * \mathbf{j}| = 11 * 1 * 1 \sin \pi / 2 = 11$.

3. $\mathbf{a} = (0, 1, 0)$ және $\mathbf{b} = (2, -1, 3)$ векторлары берілген. Осы векторлардың векторлық көбейтіндісі мен векторлық көбейтіндісінен пайда болған вектордың ұзындығын тап.

Шешуі:

$$\mathbf{a} * \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 0 + 0 - 2\mathbf{k} - 0 - 0 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k} = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{c}(3, 0, -2), |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} * \mathbf{b}| = \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13}.$$

4. $\vec{a} = \{7,4,6\}$, $\vec{b} = \{2,1,1\}$, $\vec{c} = \{19,11,17\}$ векторлары берілген. Олар компланар болады ма?

Шешуі. Үш вектордың аралас көбейтіндісін табамыз:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 119 + 76 + 132 - 114 - 136 - 77 = 327 - 327 = 0$$

Жауабы: \vec{a}, \vec{b} және \vec{c} векторлары компланар.

5. $A_1(1, -1, 2)$, $A_2(2, 1, 2)$, $A_3(1, 1, 4)$, $A_4(6, -3, 8)$ нүктелері берілген. Төбелері A_1, A_2, A_3, A_4 нүктелерінде орналасқан тетраэдрдің көлемін және A_4 нүктесінен $A_1 A_2 A_3$ жағына түсірілген биіктікті табыңыз.

$$\text{Шешуі: } V_{A_1 A_2 A_3 A_4} = \pm \frac{1}{6} (\overline{A_1 A_2} \overline{A_1 A_3} \overline{A_1 A_4})$$

$$\overline{A_1 A_2} = \{2-1, 1-(-1), 2-2\} = \{1, 2, 0\}$$

$$\overline{A_1 A_3} = \{1-1, 1-(-1), 4-2\} = \{0, 2, 2\}$$

$$\overline{A_1 A_4} = \{6-1, -3-(-1), 8-2\} = \{5, -2, 6\}$$

$$V_{A_1 A_2 A_3 A_4} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} |6+10+2| = \frac{1}{3} \cdot 18 = 6 \quad (\text{куб. бір.})$$

Енді тетраэдр көлемін есептеудің $V_{A_1 A_2 A_3 A_4} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1 A_2 A_3} \cdot h_{A_4}$ белгілі формуласын қолданып, биіктігін есептейміз.

$$S_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2} |\overline{A_1 A_2} \times \overline{A_1 A_3}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |\{4, -2, 2\}| = \frac{1}{2} \cdot 2 |\{2, -1, 1\}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot h_{A_4} = 6 \Rightarrow h_{A_4} = \frac{18}{\sqrt{6}} = \frac{18\sqrt{6}}{6} = 3\sqrt{6} \quad (\text{бірлік.})$$

Жауабы: биіктігі $3\sqrt{6}$ (бірлік).

6. Пирамиданың төбелері берілген: $A(1, 2, 3)$, $B(0, -1, 1)$, $C(2, 5, 2)$, $D(3, 0, -2)$.

Табу керек:

1. BAC бұрышын.
2. ABC үшбұрышының ауданын.
3. Пирамида көлемін.

Шешуі:

\overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} векторларын табалық:

$$\overline{AB} = (0-1, -1-2, 1-3) = (-1, -3, -2), \quad \overline{AC} = (2-1, 5-2, 2-3) = (1, 3, -1), \quad \overline{AD} = (3-1, 0-2, -2-3) = (2, -2, -5)$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} = \frac{-1 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{-8}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}}$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = 9\vec{i} - 3\vec{j} = (9, -3, 0).$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{81+9} = \frac{9\sqrt{10}}{2}.$$

$$3. \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 24.$$

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} \cdot 24 = 4.$$

7. $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 4$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \hat{\vec{q}}) = \frac{3\pi}{4}$. \vec{a} және \vec{b}

векторларынан тұрғызылған параллелограммның ауданын табыңыз.

Шешуі. $S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\vec{a}, \hat{\vec{b}}) = |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |(3\vec{p} + 2\vec{q}) \times (2\vec{p} - \vec{q})| = |3\vec{p} \times 2\vec{p} + 2\vec{q} \times 2\vec{p} - 3\vec{p} \times \vec{q} - 2\vec{q} \times \vec{q}| =$$

$$= |4\vec{q} \times \vec{p} + 3\vec{q} \times \vec{p}| = 7|\vec{q} \times \vec{p}| = 7|\vec{q}||\vec{p}|\sin(\vec{p}, \hat{\vec{q}}) = 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2} \quad (\text{шаршы. бір})$$

Жауабы: параллелограмм ауданы $42\sqrt{2}$ (шаршы. бір.)